

INDICE

Prologo para el profesor	xiii
Para el estudiante	xxiii
Parte I	
1. Números de funciones y graficas	1
1.1. introducción	
1.2. La recta real y el plano coordenado. Pitágoras	2
1.3. pendientes y ecuaciones de las líneas rectas	11
1.4. Circunferencias y parábolas. Descartes y Fermat	16
1.5. el concepto de función	23
1.6. graficas de funciones	30
1.7. Trigonometría introductoria. Las fundones sen 0 y cos 0	38
Repaso. Definiciones, conceptos, métodos	47
Problemas adicionales	48
2. La derivada de una función	
2.1. ¿Qué es el calculo? El problema de las tangentes	53
2.2. como calcular la pendiente de la tangente	56
2.3. la definición de la derivada	61
2.4. Velocidad y tasas de cambio. Newton y Leibniz	66
2.5. El concepto de límite. Dos limites trigonométricos	72
2.6. Funciones continuas. El teorema del valor medio y otros teoremas	78
Repaso. Definiciones, conceptos, métodos	
Problemas adicionales	84
3. El calculo de derivadas	
3.1. derivadas de polinomios	87
3.2. las reglas del producto y del cociente	93
3.3. funciones compuestas y la regla de la cadena	98
3.4. algunas derivadas trigonométricas	104
3.5. funciones implícitas y exponentes fraccionarios	109
3.6. derivadas de orden superior	115
Repaso. Definiciones, conceptos, métodos	
Problemas adicionales	119
4. Aplicaciones de las derivadas	
4.1. Funciones crecientes y decrecientes. Máximos y mínimos	123
4.2. concavidad y puntos de inflexión	128
4.3. problemas de máximos y mínimos aplicados	132
4.4. Más problemas de máximos y mínimos. Reflexión y refracción	140
4.5. tasas relacionadas	148
4.6. el método de Newton para resolver ecuaciones	153
4.7. (opcional) aplicaciones a la economía. análisis marginal	157
Repaso. conceptos, métodos	
Problemas adicionales	166
5. Integrales indefinidas y ecuaciones diferenciales	
5.1. Introducción	173
5.2. diferenciales y aproximaciones mediante la recta tangente	
5.3. Integrales indefinidas. Integración por sustitución	180
5.4. Ecuaciones diferenciales. Separación de variables	187
5.5. Movimiento bajo la acción de la gravedad. Velocidad de escape y	191

agujeros negros	
Repaso. conceptos, métodos Problemas adicionales	197
6. Integrales definidas	
6.1. Introducción	199
6.2. el problema de las líneas	200
6.3. la notación sigma y ciertas sumas especiales	204
6.4. El área bajo una curva. Integrales definidas. Riemann	207
6.5. el calculo de áreas como limites	212
6.6. el teorema fundamental del calculo	216
6.7. propiedades de las integrales definidas	223
Repaso. conceptos, métodos Problemas adicionales	226
Apéndice: las lunas de Hipócritas	228
7. Aplicaciones de la integración	
7.1. Introducción. El significado intuitivo de la integración	231
7.2. el área entre dos curvas	232
7.3. volúmenes: el método de los discos	236
7.4. volúmenes: el método de las cáscaras cilíndricas	242
7.5. longitud de arco	248
7.6. el área de una superficie de revolución	252
7.7. trabajo y energía	256
7.8. fuerza hidrostática	264
Repaso. conceptos, métodos Problemas adicionales	267
Apéndice: Arquímedes y el volumen de una fuerza	270
Parte II	
8. Funciones exponenciales y logarítmicas	273
8.1. Introducción	
8.2. repaso de exponente y logaritmos	274
8.3. el numero e y la función $y=e^x$	278
8.4. La función logaritmo natural $y=1/nx$. Euler	283
8.5. Aplicaciones creativas. Crecimiento de la población y desintegración	291
8.6. Más aplicaciones. Cemento de la población inhibido, etc.	297
Repaso. conceptos, formulas Problemas adicionales	301
9. Funciones trigonométricas	
9.1. Introducción	305
9.2. las derivadas del seno y del coseno	314
9.3. Las integrales del seno y del coseno. El problema de la aguja	319
9.4. las derivadas de las otras cuatro funciones	323
9.5. las funciones trigonométricas inversas	326
9.6. Movimiento armónico simple. El péndulo	332
9.7. (opcional) funciones hiperbólicas	337
Repaso. definiciones, formulas Problemas adicionales	342
9. Métodos de integración	
10.1. Introducción. Las formulas básicas	347
10.2. el método de sustitución	350

10.3. ciertas integrales trigonométricas	354
10.4. cambios de variable trigonométricos	358
10.5. completar el cuadrado	362
10.6. el método de la descomposición en fracciones simples	364
10.7. integración por partes	370
10.8. Un poco de todo. Estrategia para tratar con integrales de diversos tipos	376
10.9. Integración numérica. La regla de Simpson	383
Repaso. Formulas, métodos	388
Problemas adicionales	389
Apéndice 1: la catenaria, o curva de una cadena colgante	392
Apéndice 2: el producto de Wallis $n=2, 3, 4, 5, 6, 7$.	394
Apéndice 3: como descubrió Leibniz su fórmula $n=1, 3, 5, 7, \dots$.	396
11. Mas aplicaciones de la integración	
11.1. el centro de masas de un sistema discreto	397
11.2. centroides	400
11.3. los teoremas de Pappus	404
11.4. el momento de inercia	406
Repaso. Definiciones, métodos	
Problemas adicionales	409
12. Formas indeterminadas e integrales impropias	
12.1. Introducción. El teorema del valor medio revisitado	411
12.2. La forma indeterminada $0/0$. la regla de L'Hospital	413
12.3. otras formas indeterminadas	417
12.4. integrales impropias	422
12.5. La distribución normal. Gauss	428
Repaso. Definiciones, métodos	
Problemas adicionales	437
13. Series infinitas de constantes	
13.1. ¿Qué es una serie infinita?	441
13.2. sucesiones convergentes	446
13.3. series convergentes y divergentes	453
13.4. propiedades generales de las series convergentes	460
13.5. Series de términos no negativos. Criterios de comparación	466
13.6. El criterio de la integral. La constante de Euler	470
13.7. el criterio del cociente y el criterio de la raíz	476
13.8. El criterio de de las series alternadas. Convergencia absoluta	480
Repaso. Definiciones, conceptos, criterios	
Problemas adicionales	485
Apéndice 1: el descubrimiento de Euler de la fórmula $E_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	491
Apéndice 2: masa cerca de los números irracionales. π es irracional	492
Apéndice 3: la serie $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^n}$ de los recíprocos de los primos	494
14. Series de potencias	
14.1. introducción	497
14.2. el intervalo de convergencia	498
14.3. derivación e integración de series de potencias	503
14.4. series de Taylor y la fórmula de Taylor	508
14.5. cálculos mediante la fórmula de Taylor	518
14.6. aplicaciones de ecuaciones diferenciales	524

14.7. (opcional) operaciones con las series de potencias	529
14.8. (opcional) números complejos y la formula de Euler	536
Repaso. Definiciones, formulas, criterios Problemas adicionales	538
Apéndice: los números de Bernoulli y algunos maravillosos descubrimientos de Euler	540
Parte III	
15. Las secciones cónicas	545
15.1. Introducción. Las secciones de un cono	
15.2. otra mirada a las circunstancia y a las parábolas	548
15.3. elipses	552
15.4. hipérbolas	559
15.5. las definiciones de foco, directriz y excentricidad	567
15.6. (opcional) ecuaciones de segundo grado. Rotación de los ejes	569
Repaso. Definiciones, propiedades Problemas adicionales	574
16. Coordenadas polares	
16.1. el sistema de coordenadas polares	577
16.2. mas graficas de ecuaciones en coordenadas polares	581
16.3. ecuaciones en coordenadas polares de las circunferencias, las cónicas y las espirales	586
16.4. longitud de arco y rectas tangentes	592
16.5. áreas en coordenadas polares	597
Repaso. Definiciones, formulas Problemas adicionales	601
17. Ecuaciones paramétricas. Vectores en el plano	
17.1. ecuaciones paramétricas de las curvas	605
17.2. la cicloide y otras curvas similares	612
17.3. Algebra vectorial. Los vectores unitarios i y j	620
17.4. Derivadas de funciones vectoriales. Velocidad y aceleración	625
17.5. la curvatura y el vector normal unitario	631
17.6. las componentes tangencial y normal de la aceleración	636
17.7. las leyes de Kepler y la ley de la gravedad de Newton	640
Repaso. Definiciones, formulas Problemas adicionales	647
Apéndice: solución de Bernoulli al problema de la braquistocrona	649
18. Vectores en el espacio tridimensional. Superficies	
18.1. Coordenadas y vectores en el espacio tridimensional	653
18.2. el producto escalar de dos vectores	658
18.3. el producto vectorial de dos vectores	663
18.4. rectas y planos	669
18.5. cilindros y superficies de revolución	676
18.6. superficies cuadráticas	679
18.7. coordenadas cilíndricas y esféricas	683
Repaso. Definiciones, ecuaciones Problemas adicionales	685
19. Derivadas parciales	
19.1. funciones de varias variables	687
19.2. derivadas parciales	692

19.3. el plano tangente a una superficie	698
19.4. Incrementos y diferenciales. El lema fundamental	702
19.5. derivadas direccionales y el gradiente	704
19.6. la regla de la cadena para las derivadas parciales	709
19.7. problemas de máximos y mínimos	716
19.8. Máximos y mínimos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.	720
19.9. (Opcional). La ecuación de Laplace, la ecuación del calor y la ecuación de ondas. Laplace y Fourier	726
19.10. (Opcional). Funciones implícitas	732
Repaso. Definiciones, métodos	736
20. Integrales múltiples	
20.1. Volúmenes como integrales iteradas	737
20.2. integrales dobles e integrales iteradas	741
20.3. aplicaciones físicas de las integrales dobles	746
20.4. integrales dobles en coordenadas polares	750
20.5. integrales triples	755
20.6. coordenadas cilíndricas	760
20.7. Coordenadas esféricas. Atracción gravitatoria	763
20.8. Áreas de superficies curvadas. La formula de Legendre	769
Repaso: conceptos, teoremas	772
Apéndice. La formula de Euler $E_{81} - 1N^2 = \pi^2/6$ mediante integración doble	773
21. Integrales de línea y de superficie. El teorema de Green, el teorema de Gauss y el teorema de Stokes	775
21.1. integrales de línea en el plano	
21.2. Independencia de la trayectoria. Campo conservativos	782
21.3. el teorema de Green	789
21.4. integrales de superficie y el teorema de Gauss	796
21.5. El teorema de Stokes	804
21.6. Las ecuaciones de Maxwell. Una reflexión final	810
Repaso: conceptos, teoremas	811
Apéndice A. la creación del calculo	
A.1. El sistema de los números reales	813
A.2. Teoremas sobre limites	817
A.3. Algunas propiedades mas profundas de las funciones continuas	823
A.4. el teorema del valor medio	827
A.5. La integrabilidad de las funciones continuas	831
A.6. Otra demostración del teorema fundamental del calculo	835
A.7. curvas continuas sin longitud	836
A.8. La existencia de $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$	839
A.9. Funciones que no pueden integrarse	841
A.10. La validez de la integración por sustitución inversa	846
A.11. Demostración del teorema de la descomposición en fracciones simples	847
A.12. los criterios del cociente extendidos de Raabe y de Gauss	850
A.13. Convergencia absoluta frente a convergencia condicional	855
A.14. El criterio de Dirichlet	861
A.15. convergencia uniforme para series de potencias	864
A.16. división de series de potencias	867
A.17. La igualdad de las derivadas parciales cruzadas	869

A.18. Derivación bajo el signo integral	870
A.19. una demostración del Lema fundamental	871
A.20. una demostración del teorema de la función implícita	872
A.21. cambio de variables en las integrales múltiples. Jacobianos	873
B. Algunos temas de repaso	
B.1 el teorema del binomio	877
B.2. Inducción matemática	882
Respuestas a los problemas con números impares	889
Índice de materias	909