

INDICE

Prefacio	XIII
1 Preliminares del cálculo: funciones y límites	1
1.1. ¿Qué es el cálculo?	3
1.1.1. el límite: la paradoja de Zenón	5
1.1.2. la derivada: el problema de la tangente	6
1.1.3. la integral: el problema del área	7
1.1.4. modelos matemáticos	8
1.2. preliminares	
1.2.1. distancia en una recta numérica	11
1.2.2. valor absoluto	12
1.2.3. distancia en el plano	20
1.2.4. trigonometría	
1.3. rectas en el plano	
1.3.1. pendiente de una recta	24
1.3.2. formas de la ecuación de una recta	26
1.3.3. rectas paralelas y perpendiculares	28
1.4. funciones y sus gráficas	30
1.4.1. definición de función	
1.4.2. notación funcional	31
1.4.3. dominio y rango de una función	34
1.4.4. composición de funciones	35
1.4.5. gráfica de una función	37
1.4.6. transformaciones de funciones	40
1.4.7. clasificación de funciones	43
1.5. límites de funciones	
1.5.1. la noción intuitiva de límite	47
1.5.2. cálculo gráfico de límites	49
1.5.3. cálculo de límites usando tablas	50
1.5.4. límites que no existan	53
1.6. propiedades de los límites	
1.6.1. cálculos con límites	56
1.6.2. uso del álgebra en el cálculo de límites	61
1.6.3. límites de funciones definidas a trozos	63
1.7. continuidad	
1.7.1. noción intuitiva de continuidad	66
1.7.2. definición de continuidad	67
1.7.3. teoremas sobre continuidad	71
1.7.4. continuidad en un intervalo	71
1.7.5. el teorema del valor intermedio	74
1.7.6. Aproximación por el método de bisección	76
1.8. introducción a la teoría de límites	81
1.8.1. el formato creyente-escéptico	82
1.8.2. demostraciones Epsilon-delta	85
1.8.3. teoremas escogidos con demostraciones formales	87
2 Técnicas de derivación y aplicaciones	97
2.1. introducción a la derivada: tangentes	
2.1.1. tangentes	99

2.1.2. pendiente de la tangentes	
2.1.3. la derivada	102
2.1.4. existencia de derivadas	106
2.1.5. continuidad y derivabilidad	108
2.1.6. notación para la derivada	109
2.2. técnicas de derivación	
2.2.1. derivadas de una función constante	112
2.2.2. derivada de una función potencial	113
2.2.3. reglas para calcular derivadas	114
2.2.4. derivadas de orden superior	121
2.3. derivadas de funciones trigonométrica	
2.3.1. dos límites trigonométricos especiales	123
2.3.2. derivadas del seno y del coseno	126
2.3. derivadas de otras funciones trigonométricas	128
2.4. Tasa de variación. Movimiento rectilíneo	
2.4.1. Tasa de variación; interpretación geométrica	132
2.4.2. tasa media e instantánea de variación	133
2.4.3. aplicación a la física: movimiento rectilíneo	134
2.4.4. el problema de la caída libre	137
2.5. la regla de la cadena	
2.5.1. introducción a la regla de la cadena	140
2.5.2. derivación de funciones compuestas	142
2.5.3. fórmulas generalizadas de derivación	144
2.5.4. justificación de la regla de la cadena	147
2.6. derivación implícita	
2.6.1. procedimiento general para la derivación implícita	149
2.6.2. derivación implícita de orden superior	153
2.7. tasas de variación ligadas	155
2.8. diferenciales y aproximación por la tangente	
2.8.1. aproximación por la tangente	161
2.8.2. la diferencial	165
2.8.3. propagación del error	167
2.8.4. análisis marginal en economía	169
2.9. el método de Newton-Raphson de aproximación de raíces	
2.9.1. el método de Newton-Raphson	172
2.9.2. estudio de cuando falla el método de Newton-Raphson	176
3 otras aplicaciones derivadas	181
3.1. valores extremos de una función continua	
3.1.1. el teorema de los valores extremos	183
3.1.2. extremos relativos	185
3.1.3. extremos absolutos	189
3.1.4. optimización	192
3.2. el teorema del valor medio	195
3.2.1. el teorema de Rolle y la demostración del teorema del valor medio	197
3.2.2. algunas aplicaciones del teorema del valor medio	199
3.3. el test de la derivada primera	
3.3.1. funciones crecientes y decrecientes	202
3.3.2. el test de la derivada primera	205
3.3.3. dibujo de curvas con la derivada primera	207

3.4. convexidad y el test de la derivada de segunda	
3.4.1. convexidad	213
3.4.2. puntos de inflexión	214
3.4.3. dibujo de curvas con la derivada segunda	218
3.4.4. el test de a derivada segunda par extremos relativos	221
3.5. limites infinitos y asíntotas	
3.5.1. asíntotas	224
3.5.2. limites infinitos	225
3.5.3. graficas con asíntotas	233
3.6. sumario de dibujo de curvas	
3.6.1. dibujo general de curvas	236
3.7. optimizasen en física e ingeniería	
3.7.1. procedimiento de optimización	243
3.7.2. física: el principio de Fermat en óptica y la ley de Snell	250
3.8. optimización en comercio, economía y ciencias de la vida	
3.8.1. optimización de funciones discretas	254
3.8.2. economía: dos principios de análisis marginal	255
3.8.3. dirección de empresas: un modelo de inventario	258
3.8.4. fisiología: el ángulo optimo de ramificación vascular	259
3.9. regla de l'Hopital	262
3.9.1. regla de l'Hopital	263
3.9.2. formas indeterminadas 0/0	264
3.9.3. formas indeterminadas 00/00	266
3.9.4. regla de l'Hopital para otras formas	268
3.10. integrales	
3.10.1. el problema inverso de la derivación	271
3.10.2. notación para la integral indefinida	272
3.10.3. formulas de integración	273
3.10.4. aplicaciones	275
4 Integración	281
4.1. el área como limite de una suma; notación sumatoria	
4.1.1. el área como limite de una suma	283
4.1.2.el esquema general de aproximación	285
4.1.3. notación sumatoria	286
4.1.4. el área de las formulas sumatorias	287
4.2. las sumas de Riemann y la integral definida	
4.2.1. sumas de Riemann	290
4.2.2. la integral definida	292
4.2.3. el área como integral	295
4.2.4. la distancia como integral	296
4.2.5. la distancia como integral	300
4.3. el teorema fundamental del calculo: integración por cambio de variable	303
4.3.1. el teorema fundamental del calculo	
4.3.2. cambio de variable en una integral indefinida	307
4.3.3. cambio de variable en una integral definida	311
4.4. introducción a las ecuaciones diferenciales	
4.4.1. Introducción y terminología	313
4.4.2. ecuaciones diferenciales de variables separadas	315

4.4.3. trayectorias ortogonales	
4.4.4. flujo de un fluido a través de un orificio	317
4.4.5. velocidad de escalpe de un proyectil	319
4.5. el teorema del valor medio del calculo integral; valor medio	
4.5.1. el teorema del valor medio del calculo integral	322
4.5.2. valor medio de una función	324
4.5.3. limites de integración variables	326
4.5.4. regla de Leibniz	
4.6. integración numérica: la regla del trapecio y la de Simpson	330
4.6.1. aproximación por rectángulos	331
4.6.2. regla del trapecio	333
4.6.3. la regla de Simpson	335
4.6.4. Estimación del error	338
4.7. área comprendida entre dos curvas	
4.7.1. área comprendida entre dos curvas	338
4.7.2. el área por bandas verticales	341
4.7.3. el área por bandas horizontales	342
4.7.4. dos aplicaciones a la economía	344
5 Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricos inversas	355
5.1. funciones exponenciales; el numero e	
5.1.1. funciones exponenciales	357
5.1.2. la base natural e	361
5.1.3. interés compuesto	362
5.2. funciones inversas, logaritmos	
5.2.1. funciones inversas	366
5.2.2. criterios para la existencia de la función inversa f-1	368
5.2.3. grafica de f-1	369
5.2.4. la función logarítmica	372
5.2.5. el logaritmo natural	375
5.3. derivadas de funciones en e^x y $\ln x$	
5.3.1. derivadas de funciones logarítmicas naturales	380
5.3.2. derivadas de funciones exponenciales	382
5.3.3. derivación logarítmica	385
5.4. aplicaciones de las derivadas de e^x y $\ln x$	
5.4.1. dibujo de curvas	387
5.4.2. optimización	390
5.4.3. cálculo de limites por logaritmos y regla de l'Hopital	392
5.5.integrales de funciones en e^x y $\ln x$	
5.5.1. integración de e^x y $\ln x$	397
5.5.2. integración de funciones en $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cotg} x$	399
5.6. funciones trigonométricas inversa	
5.6.1. definición funciones trigonométricas inversa	401
5.6.2. propiedades de las funciones trigonométricas inversa	404
5.6.3. derivadas e integrales de funciones trigonométricas inversa	406
5.7. punto de vista alternativo: el logaritmo como integral	412
5.7.1. defeción el logaritmo natural como integral	413
5.7.2. interpretación geométrica el logaritmo natural	414
5.7.3. la función exponencial natural	415
6 Otras aplicaciones de la integral	421

6.1. Volúmenes: discos, arandelas y laminas	
6.1.1. el método de las secciones	423
6.1.2. volúmenes de sólidos de revolución: discos y arandelas	426
6.1.3. el método de las aminas cilíndricas	431
6.2. longitudes y áreas	
6.2.1. longitud de u arco de curva	436
6.2.2. área de una superficie de revolución	440
6.3. aplicaciones físicas: trabajo, fuerza hidrostática y centros de gravedad	444
6.3.1. trabajo	
6.3.2. presión y fuerza hidrostática	447
6.3.3. centro de gravedad y momento de una región plana	451
6.3.4. el teorema de Pappus del volumen	454
6.4. crecimiento, desintegración y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	457
6.4.1. desintegración radiactiva: datación por carbono 14	
6.4.2. crecimiento exponencial y logístico	459
6.4.3. ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	461
6.4.4. aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	464
7 Métodos de integración	475
7.1. repaso te integración por cambio de variable y por tablas	
7.1.1. repaso te integración por cambio de variable	477
7.1.2. uso de las tablas de integrales	480
7.1.3. cambios de variables trigonométricos	480
7.2. integración por partes	
7.2.1. formula de integración por partes	488
7.2.2. integración por partes reiterada	489
7.2.3. integral definida por partes	490
7.2.4. resolución de ecuaciones diferenciales por partes	492
7.3. el método de las fracciones simples	
7.3.1. descomposición de las fracciones simples	494
7.3.2. integración de funciones racionales	498
7.3.3 cambio de variable y fracciones simples	501
7.3.4. integrales trigonométricas racionales	503
7.4. resumen de métodos de integración	506
7.5. integrales impropias	
7.5.1. integrales con límites infinitos	511
7.5.2. integrales con integrados no acotado	517
7.6. las funciones hiperbólicas y sus inversas	522
7.6.1. derivadas e integrales de funciones hiperbólicas	524
7.6.2. funciones hiperbólicas inversas	526
8 Series	533
8.1. sucesiones y limites	
8.1.1. sucesiones	535
8.1.2. limite de una sucesión	536
8.1.3. sucesiones monótonas y acortadas	543
8.2. introducción a las series	
8.2.1. definición de series	548

8.2.2. propiedades generales de las series	550
8.2.3. series geométricas	552
8.2.4. aplicaciones de las series geométricas	553
8.3. el criterio de a integral: p-series	
8.3.1. criterio de divergencia	557
8.3.2. series de términos no negativos; el tst de la integral	558
8.3.3. p-series	561
8.4. criterios de comparación	564
8.4.1. criterio directo de comparación	567
8.4.2. criterio de comparación por limite	
8.5. criterios del cociente y de la raíz	571
8.5.2. el criterio de la raíz	575
8.5.3. resumen de criterios de convergencia para series de términos positivos y series de términos no negativos	576
8.6. series alternadas, convergencia condicional y absoluta	579
8.6.1. el criterio de Leibniz para series alternadas	580
8.6.2. estimación del error en las series alternadas	584
8.6.3. convergencia condicional y absoluta	586
8.6.4. reordenación de series absolutamente convergentes	588
8.7. series de potencias	
8.7.1. convergencia de una serie de potencias	591
8.7.2. series de potencias en $(x-c)$	595
8.7.3. derivación e integración término a término de una serie de potencia	596
8.8. series de Taylor y Maclaurin	
8.8.1. polinomios de Taylor y Maclaurin	601
8.8.2. el teorema de Taylor	602
8.8.3. series de Taylor y Maclaurin	604
8.8.4. operaciones con series de series de Taylor y Maclaurin	610
A Teoremas de cada capítulo	623
B algunas demostraciones	643
C tablas de integrales	649
D soluciones a los problemas	659
Índice alfabético	705