

<b>Aritmética</b> .....	1
<b>Introducción</b> .....	2
Un poco de historia .....	2
Los números .....	2
Clasificación de los números .....	2
Igualdad y desigualdad entre números .....	4
Propiedades de la igualdad .....	4
Propiedades de la desigualdad .....	4
Operaciones aritméticas .....	5
Operaciones con números naturales .....	5
Suma .....	5
Multiplicación o producto .....	7
División .....	9
Números enteros .....	10
Aproximación intuitiva .....	10
Positivos y negativos. El conjunto $Z$ .....	11
Valor absoluto de un número entero .....	11
Representación en la recta .....	12
Ordenación de los números enteros .....	12
Suma de números enteros .....	12
Resta de números enteros .....	13
Producto de números enteros .....	13
División exacta de dos números enteros .....	13
Potencia de base entera y exponente natural .....	13
Operaciones con potencias de base entera. Propiedades .....	14
Estudio formal del número entero .....	16
Operaciones con números enteros .....	17
<b>Números racionales</b> .....	18
Noción de número racional .....	18
Representación gráfica de números racionales en la recta numérica .....	19
Ordenación de números racionales .....	19
Aplicaciones de los números racionales y su significación .....	20
Valor absoluto de un número racional .....	21
Fracciones equivalentes .....	22
Comparación de fracciones .....	22
Operaciones con números racionales .....	23
Reducción a común denominador .....	23
Suma o adición .....	23
Resta o sustracción .....	24
Multiplicación o producto .....	24
División o cociente .....	24
<b>Divisibilidad</b> .....	33
Introducción .....	33
Múltiplos y divisores .....	33
Números primos .....	33
Números compuestos .....	33
Propiedades de la divisibilidad .....	33
Reglas de divisibilidad .....	33
Divisibilidad por la unidad seguida de ceros .....	34
Divisibilidad por 2 y por 5 .....	34
Divisibilidad por 4 y por 25 .....	34
Divisibilidad por 8 y por 125 .....	34
Divisibilidad por 3 y por 9 .....	34

Divisibilidad por 7 .....	34
Divisibilidad por 11 .....	34
Criba de Eratóstenes .....	35
Descomposición factorial .....	35
Máximo común divisor .....	36
Algoritmo de Euclides .....	36
Mínimo común múltiplo .....	37
<b>Números reales</b> .....	37
Definición de número real .....	37
Operaciones con números reales .....	39
Suma .....	39
Multiplicación .....	39
Potenciación .....	39
Radicación .....	40
Logaritmización .....	41
Introducción al cálculo logarítmico .....	41
Definición de logaritmo .....	41
Logaritmos decimales .....	41
Propiedades de los logaritmos .....	44
Antilogaritmos .....	45
Cologaritmos .....	45
<b>Sistemas de numeración</b> .....	46
Sistemas aditivos .....	46
Sistemas posicionales. Bases .....	47
Sistema binario .....	48
Sistema hexadecimal .....	49
Sistema decimal .....	49
<b>Cálculos aproximados</b> .....	51
Introducción. Errores .....	51
Operaciones con números aproximados .....	51
Errores absolutos .....	51
Errores relativos .....	52
Instrumentos de cálculo .....	52
Reglas de cálculo .....	52
Máquinas aritméticas .....	52
Máquinas calculadoras .....	52
Ordenadores .....	53
<b>Proporciones. Progresiones. Rudimentos de contabilidad</b> .....	55
Razones y proporciones .....	55
Reparto proporcional .....	55
Repartos inversamente proporcionales .....	56
Magnitudes inversamente proporcionales .....	56
Regla de tres simple inversa .....	56
Progresiones .....	56
Progresiones aritméticas .....	56
Progresiones geométricas .....	57
Rudimentos de contabilidad .....	57
Interés .....	57
Anualidades .....	58
<b>Álgebra</b> .....	59
<b>Álgebra</b> .....	60
Nociones generales .....	60
Números y letras .....	60
Expresiones algebraicas .....	61
Términos y coeficientes de una expresión algebraica .....	62
Valor numérico de una expresión algebraica .....	62

Polinomios de una variable .....	65
Funciones polinómicas .....	72
Fraciones polinómicas .....	77
Ecuaciones de primer grado .....	82
Ecuaciones de segundo grado .....	85
Representación gráfica de las funciones polinómicas .....	86
Inecuaciones .....	94
Números complejos .....	96
Aplicaciones lineales .....	106
Sistemas de ecuaciones .....	112
<b>Geometría</b> .....	<b>117</b>
<b>Geometría sintética</b> .....	<b>118</b>
Nociones básicas fundamentales .....	118
Punto geométrico .....	118
Recta geométrica .....	118
Plano geométrico .....	119
Semirrecta y segmento .....	119
Operaciones con segmentos .....	120
Vectores .....	120
Semiplano .....	121
Conceptos básicos sobre puntos, planos y rectas .....	121
Ángulos .....	122
Ángulos consecutivos .....	123
Ángulos adyacentes .....	123
Ángulo llano .....	123
Ángulo recto .....	123
Ángulo agudo .....	124
Ángulo obtuso .....	124
Suma de ángulos .....	124
Ángulos complementarios .....	124
Ángulos suplementarios .....	124
Bisectriz .....	124
Ángulos opuestos por el vértice .....	125
Rectas perpendiculares .....	125
Intersecciones de una recta con otras dos .....	127
Polígonos .....	127
Línea poligonal .....	127
Perímetro .....	128
Diagonales .....	128
Clasificación de los polígonos .....	128
Suma total de los ángulos de un polígono .....	129
Triángulos .....	129
Clasificación de los triángulos .....	129
Estructuras importantes comunes a todos los triángulos .....	130
Suma de los ángulos de un triángulo .....	131
Criterios de igualdad de triángulos .....	131
Criterios de semejanza de triángulos .....	135
Condiciones de semejanza en triángulos rectángulos .....	136
Relaciones métricas en los triángulos rectángulos .....	137
Cuadriláteros .....	140
Paralelogramos .....	140
Trapezoides .....	140
Trapezoides .....	141
Polígonos regulares .....	141
Radio, centro y apotema .....	141
Polígonos semejantes .....	142
Métodos de cálculo de las áreas de los polígonos .....	142
Área del rectángulo .....	143
Área del cuadrado .....	143
Área de un paralelogramo .....	143

Área del rombo .....	143
Área del triángulo .....	144
Área del trapecio .....	144
Área de un polígono regular de $n$ lados .....	145
Área de un polígono cualquiera .....	145
Circunferencia y círculo .....	146
Circunferencia .....	146
Centro .....	146
Diámetro y radio .....	146
Círculo .....	146
Arco .....	146
Cuerda .....	147
Relaciones entre rectas y circunferencias .....	147
Relaciones entre dos circunferencias .....	147
Clasificación de los ángulos en una circunferencia .....	149
Longitud de la circunferencia .....	150
Cálculo del radio de una circunferencia .....	150
Área del círculo .....	151
Sector circular .....	152
Segmento circular .....	152
Corona circular .....	153
Trapecio circular .....	153
Cuerpos geométricos .....	154
Poliedros. Teorema de Euler .....	154
Prismas .....	155
Paralelepípedos .....	157
Pirámides .....	158
Poliedros regulares .....	160
Poliedros conjugados .....	161
Cuerpos redondos .....	162
El cilindro .....	162
El cono .....	162
La esfera .....	164
Razones entre superficies y volúmenes .....	167
Geometría analítica .....	168
Coordenadas .....	168
Coordenadas cartesianas .....	168
Coordenadas polares .....	169
Coordenadas cilíndricas .....	172
Coordenadas esféricas .....	174
Ecuaciones de la recta .....	175
Ecuación vectorial en geometría plana .....	175
Ecuación paramétrica de una recta en geometría plana .....	175
Ecuación cartesiana de la recta en geometría plana .....	175
Ecuación métrica de la recta en el plano .....	175
Ecuación vectorial de la recta en geometría espacial .....	176
Ecuación paramétrica de una recta en el espacio .....	176
Ecuación cartesiana de la recta en geometría espacial .....	176
La medida de los ángulos .....	176
Ecuación del plano en geometría espacial .....	178
Ecuación vectorial del plano en el espacio .....	178
Ecuación paramétrica del plano en el espacio .....	178
Ecuación cartesiana del plano en el espacio .....	178
Ecuación métrica del plano en el espacio .....	179
Distancias .....	179
Distancia euclídea entre dos puntos .....	179
Distancia de un punto $m$ a una recta $D$ .....	179
Distancia de un punto $p$ a un plano $E$ .....	180
Intersecciones .....	180
Intersección entre dos rectas .....	180
Intersección entre una recta y un plano .....	181
Intersección entre dos planos .....	181

Lugares geométricos .....	182
La circunferencia .....	182
La esfera .....	183
Las cónicas .....	183
Movimientos .....	185
Movimientos en el plano .....	185
Traslación .....	185
Vectores en el plano .....	187
Simetría axial .....	188
Giro .....	189
Simetría central .....	190
Composición de movimientos .....	190
<b>Geometría afín plana y del espacio</b> .....	191
Geometría afín. Sistemas de referencia .....	191
Variedades lineales .....	193
Baricentro .....	194
Invariantes afines .....	197
<b>Geometría euclídea plana y del espacio</b> .....	198
Producto escalar .....	198
Isometrías. Bases ortogonales y ortonormales .....	199
Producto vectorial y mixto. Interpretación geométrica .....	200
Plano y espacio euclídeos .....	201
Distancia entre variedades lineales .....	202
Afinidades que conservan la distancia .....	203
Clasificación de movimientos en $E_2$ y $E_3$ .....	205
<b>Trigonometría</b> .....	209
<b>Introducción</b> .....	210
<b>Razones trigonométricas de un ángulo</b> .....	210
Ángulos y arcos .....	210
Medida de ángulos y arcos .....	210
Orientación de ángulos y arcos .....	211
Reducción de ángulos .....	212
Ángulos agudos .....	212
Razones trigonométricas .....	213
Interpretación geométrica de las razones trigonométricas .....	214
Variación de las razones trigonométricas en los ángulos agudos .....	214
Razones trigonométricas en los ángulos obtusos .....	215
Ángulos situados en cuadrantes diferentes .....	216
Relaciones entre razones trigonométricas .....	217
Relaciones entre razones trigonométricas de un mismo ángulo .....	217
Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios .....	218
Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos suplementarios .....	219
Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos que difieren 90 grados .....	219
Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos que difieren 180 grados .....	219
Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos opuestos .....	220
Recapitulación de expresiones .....	220
Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos especiales .....	221
<b>Tablas trigonométricas y fórmulas fundamentales</b> .....	223
Tablas trigonométricas naturales .....	223
Determinación de una razón trigonométrica de un ángulo .....	223
Determinación del valor de un ángulo conocida una de sus razones trigonométricas .....	226
Fórmulas para el cálculo de razones trigonométricas .....	227
Seno de $\alpha + \beta$ .....	227
Coseno de $\alpha + \beta$ .....	228
Seno de $\alpha - \beta$ .....	228

Coseno de $\alpha - \beta$ .....	228
Tangente de $\alpha + \beta$ .....	228
Tangente de $\alpha - \beta$ .....	228
Seno de $2\alpha$ .....	228
Coseno de $2\alpha$ .....	229
Tangente de $2\alpha$ .....	229
Coseno de $\frac{\alpha}{2}$ .....	229
Seno de $\frac{\alpha}{2}$ .....	229
Tangente de $\frac{\alpha}{2}$ .....	229
Seno de $\varphi +$ seno de $\rho$ .....	229
Seno de $\varphi -$ seno de $\rho$ .....	230
Coseno de $\varphi +$ coseno de $\rho$ .....	230
Coseno de $\varphi -$ coseno de $\rho$ .....	230
Recapitulación de fórmulas fundamentales .....	230
<b>Aplicaciones de la trigonometría</b> .....	231
Relaciones trigonométricas entre los elementos de un triángulo rectángulo .....	231
Resolución de triángulos rectángulos .....	232
Resolución de un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un ángulo agudo .....	232
Resolución de un triángulo rectángulo dados un cateto y un ángulo agudo .....	232
Resolución de un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto .....	233
Resolución de un triángulo rectángulo dados los dos catetos .....	233
Teoremas del seno y coseno .....	234
Teorema del seno .....	234
Teorema del coseno .....	234
Resolución de triángulos oblicuángulos .....	235
Determinación de un triángulo conociendo un lado, $a$ , y dos ángulos $A$ y $B$ .....	235
Determinación de un triángulo conociendo dos lados, $a$ y $b$ , y un ángulo opuesto, $A$ o $B$ .....	235
Determinación de un triángulo conociendo dos lados, $a$ y $b$ , y el ángulo comprendido entre ellos .....	235
Determinación de un triángulo conociendo los tres lados, $a$ , $b$ y $c$ .....	236
Teorema de la tangente .....	236
Fórmulas de Briggs .....	236
<b>Funciones trigonométricas</b> .....	237
Función seno .....	237
Representación gráfica .....	238
Función coseno .....	238
Representación gráfica .....	239
Función tangente .....	239
Representación gráfica .....	240
Función cotangente .....	241
Representación gráfica .....	241
Función secante .....	241
Representación gráfica .....	242
Función cosecante .....	242
Representación gráfica .....	242
<b>Análisis</b> .....	243
<b>Sucesiones, límites y continuidad</b> .....	244
Sucesiones .....	244
Sucesiones monótonas .....	245
Suma de sucesiones .....	245
Producto de sucesiones .....	245
Vecindades y cotas .....	245
Límite de una sucesión .....	246
Función real de variable real .....	249
Representación gráfica .....	250
Límite de una función en un punto .....	251
Continuidad: funciones continuas y funciones discontinuas .....	252
Tres teoremas importantes .....	253
<b>Derivadas y diferenciales</b> .....	254

Derivada de una función en un punto .....	254
Interpretación geométrica de la derivada .....	255
Criterio de derivabilidad. Función derivada .....	256
Funciones crecientes y decrecientes .....	257
Teorema de Rolle y teorema del valor medio .....	257
Incrementos y diferenciales. Diferencial de una función .....	257
Segundas derivadas. Derivadas de orden superior. Máximos y mínimos .....	258
Derivada de la composición de funciones .....	259
Problemas de máximos y mínimos .....	261
<b>Aproximación local</b> .....	264
Aproximación local de una función por un polinomio .....	264
Tres teoremas importantes .....	264
La fórmula de Taylor .....	265
<b>Dibujo de curvas en forma explícita</b> .....	268
<b>Cálculo integral</b> .....	274
Concepto de integración. Integral definida .....	274
Teorema del valor medio para integrales .....	275
Concepto de función primitiva de una función. Regla de Barrow .....	276
Propiedades de las integrales .....	276
Obtención de integrales indefinidas .....	278
Cálculo de integrales .....	279
Integración de funciones trigonométricas compuestas .....	280
Integración de funciones irracionales .....	281
Utilidad y aplicaciones del cálculo integral .....	282
Área de una región plana .....	283
Cálculo de volúmenes .....	283
Cálculo de longitudes de curvas .....	284
<b>Curvas y superficies parametrizables</b> .....	285
Curvas parametrizables .....	285
Superficies regladas .....	286
La esfera .....	286
<b>Combinatoria</b> .....	288
<b>Cardinal de las aplicaciones entre conjuntos</b> .....	288
Cardinal del conjunto de las aplicaciones .....	288
Cardinal del conjunto de las aplicaciones inyectivas .....	288
Cardinal del conjunto de las aplicaciones biyectivas .....	289
Cardinal del conjunto de las aplicaciones exhaustivas .....	289
<b>Variaciones</b> .....	290
Variaciones con repetición .....	291
Permutaciones .....	291
Permutaciones con repetición .....	292
Número de subconjuntos de un conjunto finito .....	293
Combinaciones .....	294
<b>Probabilidad y estadística</b> .....	295
<b>Consideraciones generales</b> .....	296
Introducción .....	296
Concepto de probabilidad .....	296
<b>Cálculo de probabilidades</b> .....	297
Algunos casos simples .....	297
Probabilidad condicionada .....	298
<b>Leyes de probabilidad</b> .....	299
Ley de probabilidad de una variable discreta .....	299
Ley de probabilidad de una variable continua .....	299
<b>Introducción a la estadística</b> .....	300
Efectivos y frecuencias .....	300
<b>Representación gráfica de variables discretas</b> .....	301

Diagrama de barras .....	301
<b>Representación gráfica de variables continuas</b> .....	302
Histograma .....	303
Diagrama de frecuencias acumuladas .....	303
Diagrama de sectores .....	303
<b>Medidas de tendencia central</b> .....	304
Moda .....	304
Mediana .....	304
Media aritmética .....	304
<b>Medidas de dispersión</b> .....	305
<b>Ejercicios</b> .....	307
<b>Enunciados</b> .....	308
Aritmética .....	308
Álgebra .....	309
Geometría .....	311
Trigonometría .....	314
<b>Soluciones</b> .....	316
Aritmética .....	316
Álgebra .....	321
Geometría .....	338
Trigonometría .....	352
<b>Enunciados</b> .....	366
Análisis .....	366
Combinatoria .....	367
Probabilidad .....	367
Estadística .....	367
<b>Soluciones</b> .....	368
Análisis .....	368
Combinatoria .....	376
Probabilidad .....	378
Estadística .....	379